

以電腦模式 PAT 規劃地下水除污系統

林鎮洋¹ W. Kinyelbach² 郭振泰³

摘要

PAT 係德國海德堡大學教授 Kinyelbach 所發展的二維解析法地下水電腦模式，其特色是操作簡單、易學、易懂並且從資料處理、數學模擬到結果輸出一氣呵成，非常適合地下水除污工程之初步規劃設計。本模式業已成功應用於德國漢堡市的一處化工廠地下水復育工作。本文之目的即在介紹該二維模式，並以範例佐證。該模式首先由解析解求得地下水流場，然後藉由 Runge/Kutta 積分得出流線圖與移動時間，其結果可作為地下水除污系統設計之依據。

關鍵詞：PAT 模式、解析法、地下水模式、復育、流線、移動時間、Dupuit / Thiem 假設、Verruijt 公式、鏡像井、Runge/Kutta 積分法

一、緒論

許多歐洲國家以地下水為主要水源，所以對於地下水的研究起步很早，其研究重心並且已經由水量問題轉移至水質、水量並重。最近幾年，藉現代計算機神速進步之賜，結合電腦科技於工程規劃設計的理念，已蔚然成風。本文之目的即在介紹德國海德堡大學教授 Kinyelbach 所發展的地下水電腦模式 PAT (Pathlines And Travel times)^{*3}，並以範例佐證。該模式業已成功應用於德國漢堡市 (Hamburg) 的一處化工廠地下水復育 (remediation) 工作。PAT 的特色是操作簡單、易學、易懂並且從資料處理、數學模擬到結果輸出一氣呵成，非常適合地下水除污工程的初步規劃設計。根據報載，內政部都市計畫委員會於民國八十三年八月三十日的第三百七十七次會議中已明文確定，「工業區污染土地在未確定清除以前，不准變更地目」，這和德國人「先把土地弄乾淨了再進行交易」的理念有異曲同工之妙，值得國人喝采。由於國內土地昂貴，污染廠址 (如掩埋場、油庫、加油站、廢棄工廠等) 的土地若能經由復育之後再生利用，不啻是「環保」與「經濟」相結合之一大契機。本文拋磚引玉，介紹德國地下水除污模式 PAT，以證明簡易模式亦有其理論基礎與應用價值，並希望能改變一般人視模式為畏途的先人為主觀念，進而共同研討與改進，以落實「模式本土化」的最終目標。

二、理論背景

分析地下水流系統的方法不外乎數學模式 (mathematical model)、物理模型 (physical model) 及類比模型 (analog model) 三種，目前以數學模式最常用。數學模式又可分為解析解 (analytical solution) 和數值法 (numerical analysis) 兩種。簡單的地下水水流系統常能利用解析解求得，複雜的系統 (如特殊邊界、非均質土層等) 則必須仰賴數值法了。本文將以解析法分析等向 (iso/tropic)、均質 (homogeneous) 之拘限含水層 (confined aquifer) 系統，利用 Dupuit/Thiem 假設或 Verruijt 公式，配合鏡像井 (mirror image) 疊加原理 (superposition) 進行二維流場演算，然後藉由 Runge/Kutta 積分而求得流線圖 (pathline) 與移動時間 (travel time)。茲將其演算過程分別說明如下：

(一) 流速演算

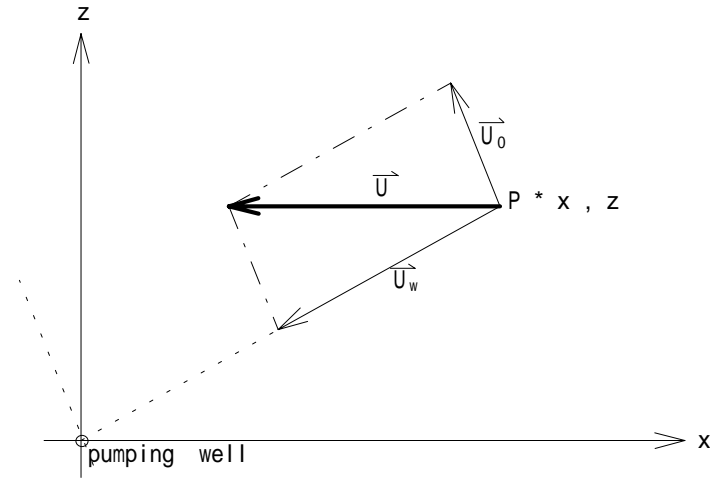
拘限含水層內任何一點座標 (x, z)，其流速可由地下水區域基本流速 (natural regional

1(德國工學博士，台大土木工程系博士後研究

2(德國海德堡大學環境物理研究所所長

3(台大土木系教授

flow) 和受井影響之流速相加而得。圖一說明了這項關係， \vec{U} 表示合成流速， \vec{U}_w 為受井影響之流速， \vec{U}_0 則代表區域基本流速。



圖一 地下水流速乃由區域基本流速和受井影響之流速合成

$$\begin{aligned} \vec{U}_o &= *U_{ox}, U_{oz} & \vec{U}_w &= *U_{wx}, U_{wz} \\ \vec{U} &= \vec{U}_o + \vec{U}_w \end{aligned} \quad (1)$$

其中：

- \vec{U} : 向量合成流速 (the vector sum of the velocitz)
- \vec{U}_w : 受井影響之流速 (radial velocitz induced bz the well)
- \vec{U}_o : 區域基本流速 (regional flow)

根據達西原理 (Darcz|s law) 地下水區域基本流速可寫成下式：

$$\vec{U}_o = -\frac{k_f}{\phi} \cdot \frac{dh}{dn} \quad (2)$$

其中：

- k_f) 滲透係數 (hzdraulic conductivitz)
- ϕ) 有效孔隙度 (effective porositz)
- $dh&dn$) 水力梯度 (hzdraulic gradient)

若區域基本流速方向與 x 軸之夾角為 α ， U_0 表區域基本流速大小，則平行座標軸流速分量為：

$$\vec{U}_o = U_o(\cos\alpha, \sin\alpha) \quad (3)$$

假設拘限含水層性質為等向、均質且水平 (x 及 z 方向) 無限延伸，則根據 Dupuit/Thiem 假設 ^{*1(}，可求得受單一抽水井影響之軸向流速 (radial flow) 分量如下：

$$\begin{aligned} U_{wx} &= -\frac{Q}{2\pi H \phi} \cdot \frac{x}{x^2 + z^2} \\ U_{wz} &= -\frac{Q}{2\pi H \phi} \cdot \frac{z}{x^2 + z^2} \end{aligned} \quad (4)$$

其中：

H) 含水層厚度

若將抽水井改為補注井 (injection well) 則僅需改取相反符號；若將單一水井改成多井系統 (multi/well) 則須疊加各口井之個別影響。綜合上述，等向、均質、水平無限延伸的拘限含水層，其流速分量一般式為：

$$\begin{aligned} U_x &= U_0 \cos \alpha - \frac{1}{2\pi H \phi} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i (x/x_i)}{(x/x_i)^2 + (z/z_i)^2} \\ U_z &= U_0 \sin \alpha - \frac{1}{2\pi H \phi} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i (z/z_i)}{(x/x_i)^2 + (z/z_i)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

另一種情形為水平向僅半無限延伸 (semi/infinite)，Dupuit/Thiem 假設將不復存在，換句話說，受井影響之流速將受制於邊界條件。一般指的邊界條件為不透水邊界 (impervious boundarz) 與固定水頭邊界 (recharge boundarz) 兩種。在此條件下必須根據鏡像井原理進行疊加演算。不透水邊界的鏡像井符號不變、大小不變但區域基本水流的方向必須平行不透水邊界；固定水頭邊界的鏡像井則符號相反、大小不變，但區域基本水流的方向不受限制。理論上，鏡像井的個數並無限制，但通常只要計算至一定數目，其誤差已小到可以忽略的程度。

最後一種情形為水平 x /方向仍然無限延伸，但 z /方向則為一定寬度 (infinite strip)，Verruijt (1982) *2(提出單口井之解析解如下式，多井系統之解析解則同理可得。

$$\begin{aligned} U_{wx} &= -\frac{Q}{4a\phi H} \cdot \left[\frac{\sinh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y-y_w)}{a}\right)} + \frac{\sinh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y+y_w)}{a}\right)} \right] \\ U_{wz} &= -\frac{Q}{4a\phi H} \cdot \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(y-y_w)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y-y_w)}{a}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\pi(y+y_w)}{a}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi(x-x_w)}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi(y+y_w)}{a}\right)} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

其中：

a) z 方向的寬度

(二) 流線演算

有了流速之後，只要乘以適當的時間間距 (time step) 即可求得下一步的位置座標，將這些點座標連接成線，便是所謂的流線。吾人可簡單寫成下列兩個一階偏微分方程：

$$u_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad u_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} \quad (7)$$

求解上述方程式的積分法很多，本文將介紹其中一種常用的四階 Runge / Kutta 法如下：

若原點座標為：

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ z(t_0) &= z_0 \end{aligned} \quad (8)$$

則 t 時間後的位置：

$$\begin{aligned}x(t + \Delta t) &= x_0 + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) \\z(t + \Delta t) &= z_0 + \frac{1}{6} \cdot (l_1 + 2 \cdot l_2 + 2 \cdot l_3 + l_4)\end{aligned}\tag{9}$$

其中 Runge/Kutta 中間運算為：

$$\begin{aligned}k_1 &= \Delta t \cdot u_x(x_0, z_0) \\l_1 &= \Delta t \cdot u_z(x_0, z_0) \\k_2 &= \Delta t \cdot u_x\left(x_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) \\l_2 &= \Delta t \cdot u_z\left(x_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{l_1}{2}\right) \\k_3 &= \Delta t \cdot u_x\left(x_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) \\l_3 &= \Delta t \cdot u_z\left(x_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{l_2}{2}\right) \\k_4 &= \Delta t \cdot u_x(x_0 + k_3, z_0 + l_3) \\l_4 &= \Delta t \cdot u_z(x_0 + k_3, z_0 + l_3)\end{aligned}\tag{10}$$

當示蹤粒子 (particle tracking) 流進水井附近時，吾人只要定義井之半徑 (well radius)，即可判斷該粒子是否為井所捕捉 (captured)，唯一要注意的是，最後一步的步長不得大於井之半徑，以免有「遺珠之憾」。

三、數學模式 PAT

根據第二節的理論基礎，德國海德堡大學環境物理研究所所長 Kinyelbach 等人以 QuickBasic 程式語言 (美國 Microsoft 公司出版) 寫成一個非常簡單的地下水模式 PAT，以作為地下水除污系統設計之依據。PAT 雖然簡易，卻是「麻雀雖小，五臟俱全」，涵蓋了前端資料處理 (preprocessing)、中間數學模擬 (simulation) 及後端結果輸出 (postprocessing) 三大部分。資料的輸出與輸入均設計成「交談」(interactive) 方式，所模擬的結果則可直接顯示在螢幕上，或輸出 HP/GL 圖形檔供其他繪圖軟體應用。PAT 所需要的軟硬體設備相當普通，其軟硬體需求如下：

(一) 硬體需求 (Hardware)

- 與 IBM 相容之個人電腦，配備 VGA 或 EGA 卡
- 640 kB 記憶體 (RAM)
- 選擇項：硬碟、數學計算器 (mathematical coprocessor)、與 HP 相容之繪圖機或印表機

(二) 軟體需求 (Software)

- MS/DOS 3.1 以上之作業系統
- 選擇項：Microsoft QuickBasic 4.0 以上，以便讀取或修改原始檔（source code）

四、模式應用

首先舉一典型範例，以說明本模式之應用。假設地下水型式（type）為拘限含水層，其性質為等向、均質、水平方向無限延伸，研究區範圍於 x 方向長 1100 m，z 方向寬 600 m，水力滲透係數（即俗稱的 k_f 值）等於 1×10^{-2} m/s，有效孔隙度 0.1，含水層厚度 10 m，水力梯度 0.001，區域基本流速方向與 x 軸之夾角為 0 度（輸入之人機對話如圖二所示）。

```

MODEL PARAMETERS

MODEL TYPE:
infinite/impervious boundary/
recharge boundary/strip .....[0/1/2/3] 0

DIMENSION OF FLOW FIELD:
x-minimum .....[m] 0
x-maximum .....[m] 1100
y minimum .....[m] 0
y-maximum .....[m] 600

AQUIFER PARAMETERS:
hydraulic conductivity .....[m/s] .01
effective porosity .....[ ] .1
thickness of aquifer .....[m] 10
hydraulic gradient .....[-] .001
direction of natural flow ....[0-360°] 0

INPUT CORRECT ? [Y/N]

```

圖二 地下水基本參數的輸入

一抽水井的抽水量為 $0.05 \text{ m}^3/\text{s}$ ，位於 x) 800 m， z) 300 m 的座標上，水井半徑設為 10 m，時間步長 1 天（以保證不越過井點），最大模擬時間為 200 天，每隔 10 天作一記號（輸入數據如圖三及圖四）。一方形結構物（landmark）位於（400, 200）、（600, 200）、（600, 400）與（400, 400）座標內。

MODEL PARAMETERS	
TIME PARAMETERS:	
maximum time	[d] 200
time-increment	[d] 1
time between markers	[d] 10
TEXT FOR DRAWING:	
Text: PATHLINES AND TRAVELTIMES:	
Text: Parameters:	
Text: kf = .01 m/s, H = 10 m, nf = .1, i = .001, alpha = 0	
Text:	
WELL DATA	
limit radius around wells	[m] 10
number of wells	[0-30] 1
LANDMARKS	
number of landmarks	[0-5] 1
INPUT CORRECT ? [Y/N]	

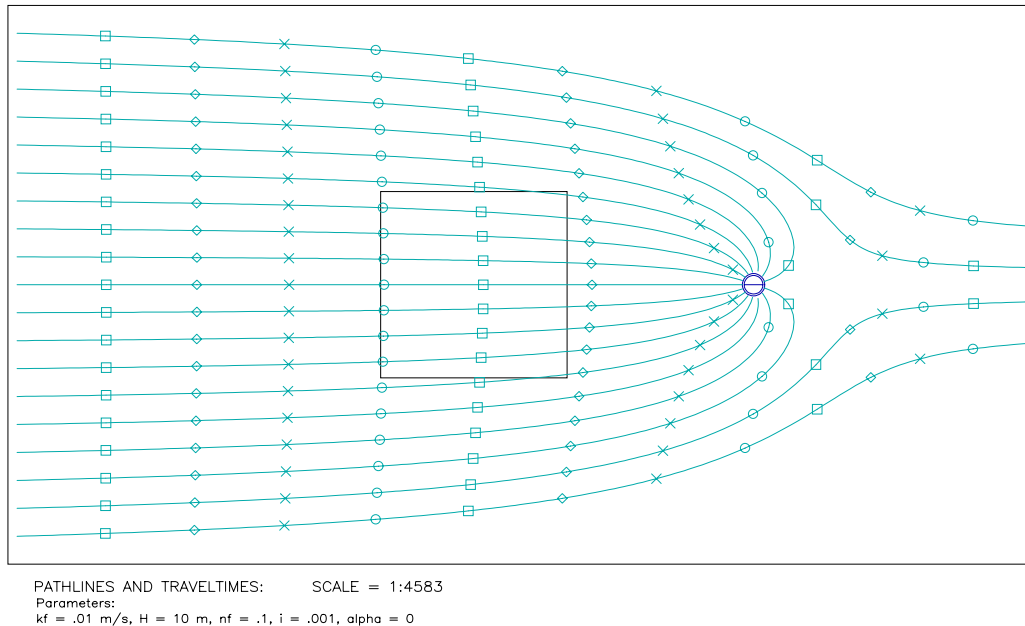
圖三 流線計算之一般參數

WELL DATA					
X [M]	Y [M]	Q [M ³ /S]	X [M]	Y [M]	Q [M ³ /S]
800	300	-.05			
INPUT CORRECT ? [Y/N]					

圖四 水井參數

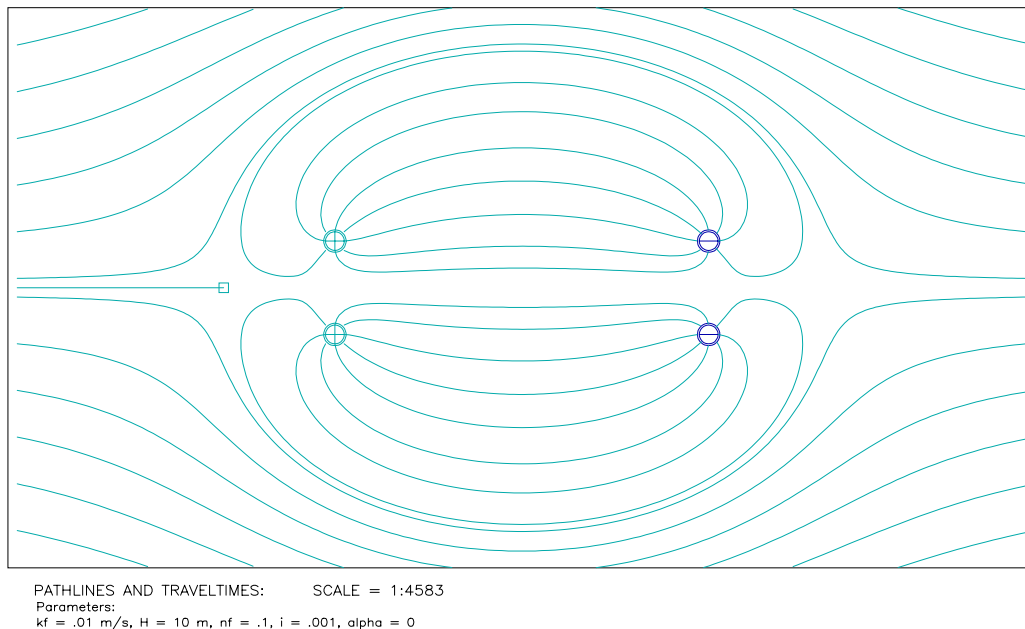
經過模擬演算，其流線圖表如圖五。中間方形結構物為 landmark，地下水方向係由左向右，但由於抽水井的作用使流線成為弧形曲線。由此流線圖可大約標訂出該抽水井的影響範圍。倘若放置若干示蹤粒子於抽水井的邊緣，再以後向追蹤法（backward）模擬運算，將所得

流線圖中的「標記」串連起來即可得所謂的等時線 (isocrone)，等時線和流線總是成正交關係。吾人可根據等時線位置訂出地下水水質保護區的範圍 (譬如自來水中常用的 50 天保護區)。



圖五 二維流線計算結果 (範例)

進一步的應用，吾人只將純抽水井的佈置改成二口抽水井與二口注入井聯合使用的設計，其餘條件不變，則可得圖六的結果。



圖六 抽水井與注入井聯合使用

上述抽水井與注入井聯合使用的設計流量均改為 $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$ ，其中抽水井置於 (350, 250) 與 (350, 350) 位置，而注入井位於 (750, 250) 與 (750, 350) 的座標，流線演算過程中不作任何記號 (trick > 每隔 200 天作一記號)。

從圖五與圖六，可了解與比較不同地下水除污設計系統的結果優劣與限制，如果該佈置不能滿足實際需求（譬如不能將污染包圍團圍住），則必需重新規劃，可能的方法包括重新排列組合水井數量、大小與位置，如能再考慮工程的可行性與經濟因素，則可求得最佳化設計。

五、結論與建議

（一）結論

1. 如同所有的模式一樣，PAT 亦作了相當程度的簡化，宜審慎應用。
2. PAT 係二維解析法之地下水電腦模式，理論基礎完備，適合等向、均質之拘限含水層之流線與移動時間計算。
3. PAT 由 QuickBasic 寫成，易學易改，程式尚據發展空間。
4. PAT 操作簡單，軟硬體要求不高。
5. PAT 從資料處理、數學模擬到結果輸出一氣呵成，適合作為教學軟體或地下水除污工程的初步規劃設計。

（二）建議

1. 由於國內土地昂貴，污染廠址（如掩埋場、油庫、加油站、廢棄工廠等）的土地復育與再生利用，是必須要面對的問題。
2. 支持不乾淨的土地根本不容許變更與買賣的決定，儘速通過「土壤污染防治法」，明文規定「土地法」與「土壤污染防治法」的關係，使土地、地主與土壤復育專業間形成良性循環。
3. 建議於台灣地區找尋一適當地下水復育個案，以驗證與修改本程式，落實「模式本土化」的目標。
4. 本模式可與「優選法」技術（如 Marquardt/Levenberg 法）相結合，以朝「參數檢定」的方向發展。

參考文獻

英文部份

1. Bear, J., Flow in Porous Media, Dover Publications Reprint 1972.
2. Verruijt, A., Theorz of Groundwater Flow, The Macmillan Press, Ltd., London 1982.
3. Kinyelbach, W. and R. Rausch, Pathlines and Travel Times Model PAT, Documentation, Gesamthochschule Kassel / Universit't, Kassel, FRG 1990.
4. Kinyelbach, W., Groundwater Modelling / An Introduction with Sample Programs in BASIC. Elsevier Science Publishers, Amsterdam 1991.
5. Fetter, C. W., Contaminant Hzdrogeologz, Macmillan Publishing Companz, U.S.A. 1993.
6. Freeye, R. A. and J. A. Cherrz, Groundwater, Prentice/Hall Inc., New Jersez 1979.

德文部份

7. Busch, K./F., L. Luckner, Geohzdraulik, Ferdinand Enke Verlag, Stuttgart 1974.
8. DVWK 98, Sanierungsverfahren flr Grundwasserschadensf'lle und Altlasten - Anwendbarkeit und

- Beurteilung, Verlag Paul Parey, Hamburg und Berlin, Germanz 1991.
9. F;ste, W., Altlasten - Die Yeitbombe im Boden tickt, Fischer Tatschenbuch Verlag GmbH, Frankfurt am Main, Germanz 1990.
 10. Brandt, E., Altlasten Bewertung, Sanierung, Finanyierung, 3. Auflage, Eberhard Blottner Verlag, Taunusstein, Germanz 1993.
 11. Weber, H. H., Altlasten - Erkennen, Bewerten, Sanieren, Springer/Verlag, Berlin, Heidelberg, Germanz 1990.

中文部份

12. 梁昇、黃天福編譯，地下水文學，大學圖書出版社印行，台北（1986）。
13. 台大農化系編印，第二屆土壤污染防治研討會論文集，台北市（1990）。
14. 中興土壤系編印，第三屆土壤污染防治研討會論文集，台中市（1992）。
15. 工研院能資所編印，第四屆土壤污染防治研討會論文集，台北市（1993）。